

(12) السؤال الأول: أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. عرف عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة إلى نقطة معينة، ثم اكتب العلاقة الموافقة لحالة جسم صلب بالنسبة لنفس النقطة.
2. اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم عطالة جسم صلب منسوب إلى جملة مقارنة ثلاثية متعامدة.

(17) السؤال الثاني: أجب عن أحد السؤالين التاليين: 1. احسب السرعة المطلقة لنقطة M . 2. احسب التسارع المطلق لنقطة M .

(7) السؤال الثالث: إذا كان الجسم الصلب صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها واحدة الأطوال، فأوجد I_G ، حيث G مركز كتلتها، ثم عزم عطالتها بالنسبة لقطرها، واحسب I_O حيث O نقطة من محيط الصفيحة.

(9) السؤال الرابع: إذا كان الجسم الصلب كرة متجانسة ونصف قطرها واحدة الأطوال ومركزها G ، فاحسب I_G ، ثم استنتج عزم عطالتها بالنسبة لمستوى مركزي في الكرة.

(20) السؤال الخامس: أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. (حل هذه المسألة مستفيداً من نتائج س4 دون إجراء أي عملية تكاملية، وأي حل بطريقة أخرى يعتبر خاطئاً) إذا كان الجسم الصلب مجسماً ناقصاً متجانساً منسوباً لجملة المقارنة $GXYZ$ ، حيث G مركز كتل الجسم، وأنصاف محاوره $a > b > c$ ، فاحسب كلاً من I_G ، I_{OYZ} ، I_{OZX} ، I_{OXY} ، ثم أوجد كلاً من I_{OYZ} ، I_{OZX} ، I_{OXY} ، حيث $O(0, -b, 0)$ في $GXYZ$ و $OZ \parallel GX$ و $OX \parallel GY$.
2. إذا كان الجسم الصلب المتحرك قرصاً دائرياً نصف قطره r ، يتدحرج بدون انزلاق على المحيط الداخلي لسلك ثابت نصف قطره R ، حيث $R > r$ ، فالمطلوب: - ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القرص. - عين المركز الآني للدوران بما لا يزيد عن سطرين. - عين كلاً من المنحني المتدحرج والمنحني القاعدة، معللاً إجابتك بما لا يزيد عن سطرين.

(35) السؤال السابع: إذا كان الجسم الصلب المتحرك مخروطاً دورانياً يتحرك حول رأسه الثابت بحيث يبقى محور تناظره دوماً في المستوي الأفقي، فالمطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط.
2. أوجد السطح المتدحرج واذكر صفاته.
3. أوجد السطح القاعدة واذكر صفاته.

تمنيتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. كامل محمد

1. إذا كانت O نقطة معينة و $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ مجموعة نقاط مادية كتلتها m_1, m_2, \dots, m_n

فإن عزم عظام المجموع S بالنسبة للنقطة O نعرفه بأنه مجموع عزوم عظامه لكل نقاط

المجموع بالنسبة لـ O أي أن: $I_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ و $r_i = |OA_i|$

إذا كان I عزم عظام بالنسبة لـ: محور QZ مستوي Q ونقطة فإن نقول

عنا العدد الموجب K إنه نصف قطر العظام إذا تحققت العلاقة $I = MK^2$

نقول عن محور ما مثل QZ إنه محور تماثل إذا ظهر دينا فيلي بخارجي حله المقارنة النظامية

إذا كان $OXYZ$ $I_x = I_y$

2. (3x4) اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم العظام لمجموع

حله مقارنته نظامية $OXYZ$: إن أي ثلاث النفاض التالية صحيحة

$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}$ و $I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

$I_{Ox} = I_{Ox1} + I_{Ox2}$ و $I_{Oy} = I_{Oy1} + I_{Oy2}$ و $I_{Oz} = I_{Oz1} + I_{Oz2}$

$I_{Ox} = I_{Ox1} + I_{Ox2}$ و $I_{Oy} = I_{Oy1} + I_{Oy2}$ و $I_{Oz} = I_{Oz1} + I_{Oz2}$

$I_{Ox} + I_{Oy} \geq I_{Oz}$ و $I_{Oy} + I_{Oz} \geq I_{Ox}$ و $I_{Ox} + I_{Oz} \geq I_{Oy}$

$I_{Ox} - I_{Oy} \leq I_{Oz}$ و $I_{Oy} - I_{Oz} \leq I_{Ox}$ و $I_{Oz} - I_{Ox} \leq I_{Oy}$

1. أجب عن سؤال واحد مما يلي: الرسم المناسب في صفحة 17
1. صاب الرسم المطلق لنقطة M : الوض $R: OXYZ$ حله مقارنته على طلبة قاسمها (آآآ آآآ)

$R: OXYZ$ حله مقارنته متحركة (كان تكون في حله متحركة مثلا) وقاعدتها (آآآ آآآ آآآ آآآ)

M نقطة تتحرك في فضاء R و (x, y, z) إحداثياتها في فضاء R

تعاليم النظرية: $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ حيث \vec{V}_a السرعة المطلقة لـ M

\vec{V}_e السرعة البرية لـ M مع R_s و \vec{V}_r السرعة النسبية لـ M في R_s

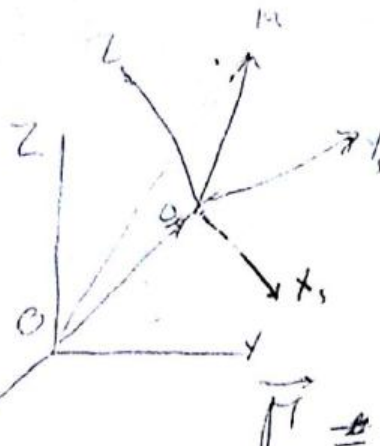
و حسب تعريف الحركة (3) $\vec{V}_e = \vec{V}(M/R) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

ومن ثم نقطة حله في الحركه (3) $\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_s) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R_s} = \dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s$

نفسه في (1) حله (2) $\vec{V}_a = \vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} + \dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s$

د. ه. م.

يا انساني



2. حساب السرعة المطلقة لنقطة M :
نطلق من المعادلة (1)
ومن نفس طرفي (1)، نحصل على R

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{V}_e}{dt} \Big|_R + \frac{d\vec{V}_p}{dt} \Big|_R \quad (2)$$

$$\vec{V}_a = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_s M} + \dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s \right] \Big|_R \quad (2)$$

$$= \frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt} \Big|_R + \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{O_s M})}{dt} \Big|_R + \frac{d(\dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s)}{dt} \Big|_R \quad (2)$$

$$\vec{V}_{O_s} = \frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt} \Big|_R \quad (3)$$

ونشتق الطرف الثاني من (2) فنجد:

$$\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{O_s M})}{dt} \Big|_R = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_s M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{O_s M}}{dt} \Big|_R$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_s M} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\vec{O_s M}}{dt} \Big|_R + \frac{d\vec{O_s M}}{dt} \Big|_R \right]$$

$$\begin{aligned} (3) &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_s M} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{O_s M} + \vec{V}_p] \\ &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_s M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_s M}) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_p \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s \right) \Big|_R = \frac{d\dot{x}_s}{dt} \vec{I}_s + \frac{d\dot{y}_s}{dt} \vec{J}_s + \frac{d\dot{z}_s}{dt} \vec{K}_s$$

$$= \ddot{x}_s \vec{I}_s + \ddot{y}_s \vec{J}_s + \ddot{z}_s \vec{K}_s + \vec{\omega} \wedge [\dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s] \quad \text{و } \vec{V}_p = \dot{x}_s \vec{I}_s + \dot{y}_s \vec{J}_s + \dot{z}_s \vec{K}_s$$

$$\frac{d\vec{I}_s}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{I}_s, \quad \frac{d\vec{J}_s}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{J}_s, \quad \frac{d\vec{K}_s}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{K}_s$$

$$\frac{d\vec{V}_p}{dt} \Big|_R = \vec{V}_p + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_p \quad (5)$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}(O_s/R) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_s M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_s M}) + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_p + \vec{V}_p + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_p \quad (6)$$

حساب تدریج الاستاتیکی الجری (استاتیکی هم‌اکنون) / فصل ۱۰

$$\vec{A} = \vec{A}(O_3/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_3M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_3M}) \quad (7)$$

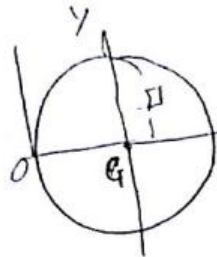
نخواهیم ۷ می (6) بنویسیم:

$$\vec{A} = \vec{A}_e + \vec{A}_p + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_p$$

و لهذا بنده بوجه بالا ضافه بالا نموده استاتیکی الجری بوجه المقدار $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_p$ و صولیس نیماحتاً و لا جراً منما کوربونیس

تاریفاً منما در مرکز ب \vec{A}_c و به شکل نکت ۱

$$\vec{A} = \vec{A}_e + \vec{A}_p + \vec{A}_c$$



$$I_G = \int_S (x^2 + y^2) ds = \int_S r^2 dx dy$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$ds = dx dy = |J| dr d\theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq R=1$$

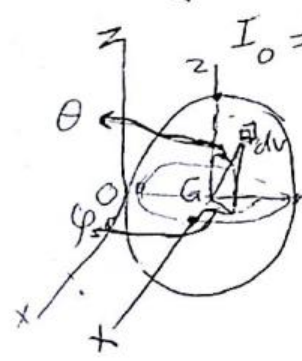
$$I_G = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$I_G = 2 I_{Gx} \Rightarrow I_{Gx} = I_G/2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_0 = m d^2 + I_G, d=1$$

$$I_0 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi$$

$$dv = dx dy dz, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$I_G = \int_V r^2 dv = \int_V r^2 dx dy dz \quad (1)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$dv = |J| dr d\theta d\phi$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$I_G = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \frac{4\pi}{3} = 3 I_{Gxz}$$

$$I_{Gxy} = I_{Gyz} = I_{Gzx} = \frac{4\pi}{15} \quad (5)$$

(2. 0. 0)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$dV = dx dy dz$$

رجع الجميع القطار بعد الجرس
نجرى القطار السالى

$$\frac{x}{a} = x \Rightarrow x = ax, \frac{y}{b} = y \Rightarrow y = by, \frac{z}{c} = z \Rightarrow z = cz$$

فصل علی المبادی

$\frac{a}{a} = 1$, $\frac{b}{b} = 1$, $\frac{c}{c} = 1$
 فنضرب على المعادلة
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (3)

$$dV = a \cdot b \cdot c \cdot dx \cdot dy \cdot dz = abc \, dV_1$$

$$I_{Gxz} = \rho \int_V y^2 dV = a \cdot b^3 c \int_V y^2 dV = a \cdot b^3 \cdot c \cdot I_{Gxz}$$

ومن المأله الرابع -

$$\textcircled{3} \quad I_{G \times 2} = \left(\frac{\rho_4}{2} a \cdot b c \pi \right) \frac{b^2}{5} = \frac{I_G}{2} = \frac{\rho_4}{2} \pi a b c \frac{b^2}{5}$$

$$(2) \quad \frac{I_{Gxz} = \left(\frac{\rho}{3} a \cdot b c \pi \right) \frac{b}{5} = \frac{m}{5} b^2}{I_{Gyz} = \rho \int_V x^2 dV = a^3 b c \rho \int_{V_1} x^2 dx dy dz = \left(\frac{\rho}{3} a b c \pi \right) \frac{a^2}{5} = \frac{m}{5} a^2}$$

② $I_{G \overline{xy}} = \frac{m c^2}{5}$

$$\textcircled{2} \quad I_G = \frac{I_{Gyz} + I_{Gzx} + I_{Gxy}}{3} = \frac{m}{5} (a^2 + b^2 + c^2)$$

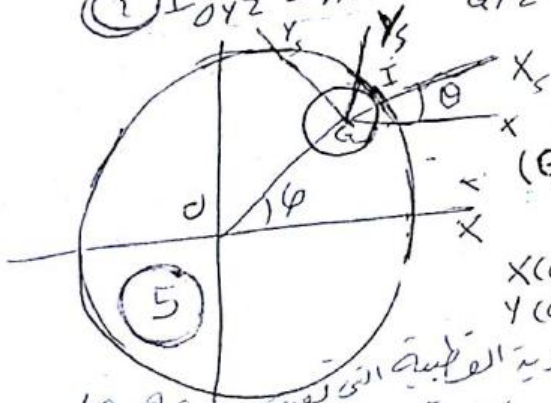
$$\textcircled{2} \quad I_G = \frac{I_{Gyz} + I_{Gzx} + I_{Gxy}}{5} = \frac{mb^2 + \frac{m}{5}(a^2 + b^2 + c^2)}{5} = \frac{m}{5}(a^2 + 6b^2 + c^2)$$

$$\textcircled{2} \quad I_o = md^2 + I_G = mb^2 + \frac{mb^2}{5} = \frac{6mb^2}{5}$$

$$\textcircled{2} \quad I_{Oxz} = md^2 + I_{Gxz} = mc^2; d=0$$

$$\textcircled{2} I_{Oxz} = m d^2 + I_{Gxz} = \frac{m c^2}{5} ; d = 0$$

$$(2) I_{OYZ} = md^2 + I_{GYZ} = @ \frac{ma^2}{5} ; d = 0$$



5
2: القوس بينه وبين الفاعل

بما هي دعوته حول مركزه ولكن $(G^x, G^y) = 0$ ولكن x, y هما
واحدانية $(G, \gamma(G))$ ولكن x ولكن بسبب القوة
(الاستناد على الاستدلال)

$$\begin{aligned} X(G) &= (R - \rho) \cos \varphi \\ Y(G) &= (R - \rho) \sin \varphi \end{aligned}$$

$y(G) = (R - P) \sin \varphi$ - وهذا أيضا من الوتر ط. ا. ا.

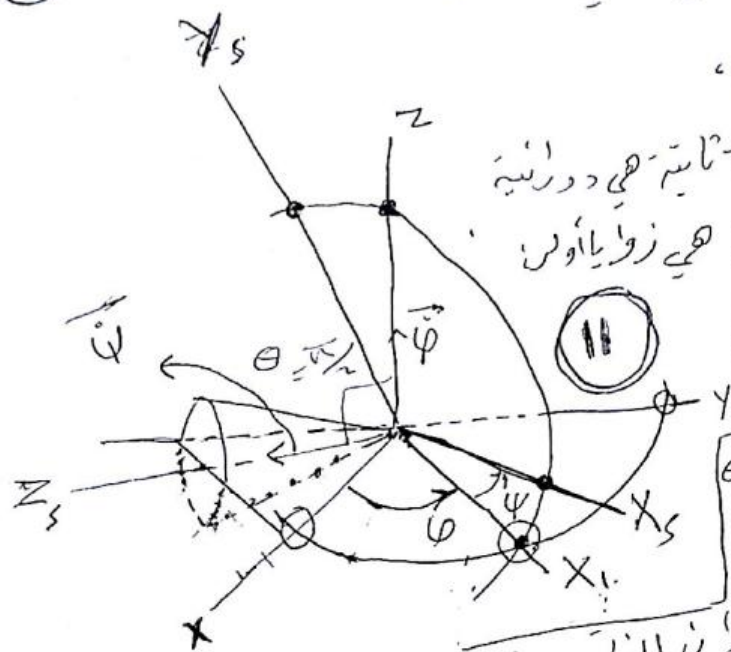
لكن من طبيعة القيد يؤدي بالفرض ان

$$V(I) = (R-r)\dot{\phi}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 0 \quad \text{رکشی } V(I) = 0 \text{ در } (R, 0)$$

$$(R-r)\dot{\phi} = r\dot{\theta} \quad \text{or}$$

- إن نقطة التماس في كل سطح قصوي السطح آتيا وبالتالي فهي مركز التماس
- إن المخرج هو المحل الهندسي للمركز الآتي للدوران في R وهذا هو الواضح
- إن هذا المخرج هو محيط القرص لأن لا تتقارقه. (11)
- إن القاعدة هو المحل الهندسي للمركز الآتي للدوران في R وهذا هو الواضح
- إن هذا المنحني القاعدة هو منحنى السطح لأن لا تتقارقه. (12)

و. ه. م.



بإحدى الجسج طلب فيه نقطة ثابتة هي دورانية
وتتبعين بثلاث فويا هي زوايا أول
الاسترخي، التخرج
الدوران الثاني
لكن التخرج معلوم $\theta = \frac{\pi}{2}$
بالفرض
اذن بقي وسيفينها

35

ط: لإيجاد السطح المخرج نجد:
الدوران الثاني ولها استقلال عن جملتها.

$$p_s = \psi \sin \psi \quad \text{But } x_s = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{r_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\psi \sin \psi} = \frac{y_s}{\psi \cos \psi} = \frac{z_s}{\psi}$$

$$q_s = \psi \cos \psi$$

$$r_s = \psi$$

$$x_s^2 + y_s^2 \leq \frac{\psi^2}{\psi^2} z^2$$

معادلات المحور الآتي للدوران
وبخلاف الوسيط نجد:
مخوره هو 02

$$p = \psi \sin \psi \quad q_s = -\psi \cos \psi$$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\psi \sin \psi} = \frac{y}{-\psi \cos \psi} = \frac{z}{\psi}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\psi^2}{\psi^2} z^2$$

وهو سطح مخروطي كورنا فر 02

و. ه. م.